Exercices sur séries de Fourier et extremas de $f(x, y)$

a) Exercices sur les séries de Fourier

Exercice 1

Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \ -\pi \leq x < 0, \\ x & si \ 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

1. *faire le graphe de f*
2. *Calculer les coefficients de Fourier a_0, a_n et b_n de la fonction $f(x)$.*
3. *Écrire la série de Fourier de $f(x)$.*
4. *En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.*

Exercice 2

Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \ -\pi \leq x < 0, \\ 1 & si \ 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

1. *Calculer les coefficients de Fourier a_0, a_n et b_n de la fonction $f(x)$.*
2. *Écrire la série de Fourier de $f(x)$.*
3. *En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.*

Exercice 3

Soit la fonction $f(x)$ définie sur $]-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 < x \leq \pi \\ \pi + x, & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

1. *Montrer que $f(x)$ est impaire.*
2. *Déterminer la série de Fourier de $f(x)$.*
3. *Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[-\pi, \pi]$.*
4. *Vérifier numériquement la convergence de la série pour quelques valeurs de x.*