Chapter 3

Série trigomométrique et série de Fourier

3.1 Définitions et généralités

Définition 8 *Par définition, la vibration est une variation dans le temps de la valeur d'une grandeur donnée, propre au mouvement, voir la position d'un système mécanique, lorsque la grandeur dont il s'agit est soit plus grande soit plus petite que la valeur moyenne connue comme valeur de référence.*

Un corps vibre lorsqu'il est animé par un mouvement oscillatoire alors qu'il se trouve en position d'équilibre. La forme la plus simple de mouvement oscillatoire est la forme sinusoïdale caractérisée par une amplitude, une fréquence et une phase.

Un mouvement harmonique est défini par une fonction sinusoïdale du type:

$$y(x) = A\sin(\omega x + \phi), \quad \textit{ou} \quad y(x) = B\cos(\omega x + \phi)$$

On entend par vibration périodique une grandeur qui se reproduit de manière identique et à intervalles réguliers en regard d'une variable dont elle dépend (temps, sepace, etc).

Le mouvement harmonique peut être généralisé par un mouvement périodique s'il y a répétition du mouvement après une période de temps donnée T

Les séries de Fourier sont des séries de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, de type particulier, qui servent à étudier les fonctions périodiques. L' idée est d'exprimer une fonction T périodique quelconque en série de fonctions T périodiques simples, de la forme $\cos(n\omega x)$ ou $\sin(n\omega x)$ ou $e^{in\omega x}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Rappelons quelques définitions indispensables.

Définition 9 *Soit T un nombre réel > 0. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite périodique de période T si l'on a, pour tout*

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x).$$

Le nombre $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est appelé pulsation associée à T.

On notera que si f est périodique de période T elle l'est aussi de période $2T$, $3T$ ... ou $-T$, $-2T$, ... Une fonction de période T est entièrement donnée par sa restriction à un intervalle de la forme $[a,\ a+T]$.
L'inverse de la période est appelé fréquence de f.
Par exemple, si T est un réel strictement positif, les fonctions sinusoïdales: $x \mapsto \cos(\frac{2n\pi}{T}x)$ et $x \mapsto \sin(\frac{2n\pi}{T}x)$ sont périodiques, de période $\frac{T}{n}$.

Définition 10 *Une fonction $f:\ [a,\ b] \to \mathbb{C}$ est dite continue par morceaux sur $[a,\ b]$ s'il existe une subdivision*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

et des fonctions f_i continues sur $]x_i,\ x_{i+1}[$ telles que f soit égale à f_i sur l'intervalle ouvert $]x_i,\ x_{i+1}[$. On note

$$f|_{]x_i,\ x_{i+1}[} = f_i$$

On dit aussi que f_i est la restriction de f sur l'intervalle $]x_i,\ x_{i+1}[$.

Définition 11
Une fonction périodique sera dite de classe C^1 par morceaux si elle est dérivable sur chacun de ses morceaux $]x_i,\ x_{i+1}[$ et sa dérivée continue sur cet intervalle.

Rappel *Une fonction continue par morceaux n'est pas nécessairement continue aux points de subdivision, mais elle admet en ces points x_i une limite à gauche (resp. à droite) notée $f(x_i^+)$ (resp. $f(x_i^-)$)*

Proposition(Deux formules)
Soit f une fonction périodique de période T continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On a les formules:

1. $\forall\ a,\ b\ \in\ \mathbb{R},\quad \int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(u)du$
2. $\forall\ a, \in\ \mathbb{R},\quad \int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt$

Pour la preuve de 1) il suffit de faire un changement de variable en posant $u = t+T$ et utiliser ensuite la périodicité, pour 2) on utilse la relation de Chasles:

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt$$

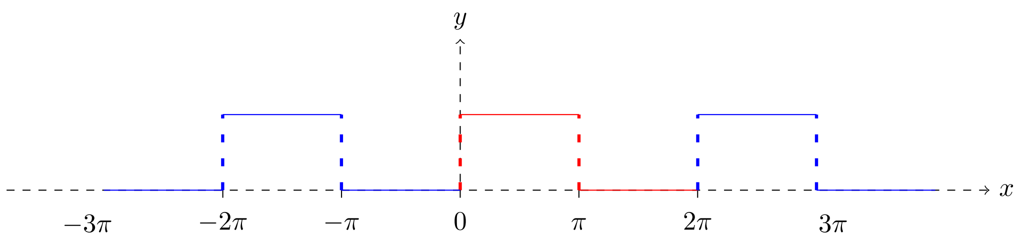
et le point 1).

Exemple 13

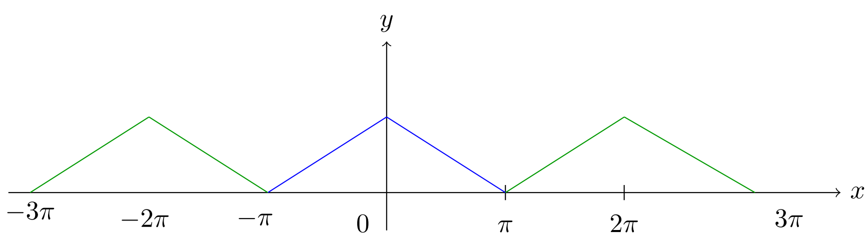
Les exemples suivants correspondent à des signaux classiques

1. *La fonction créneau définie sur $\mathbb{R}$, par exemple de période 2π qui vaut 1 sur $[0,\ \pi]$ et 0 sur $]\pi,\ 2\pi[$*

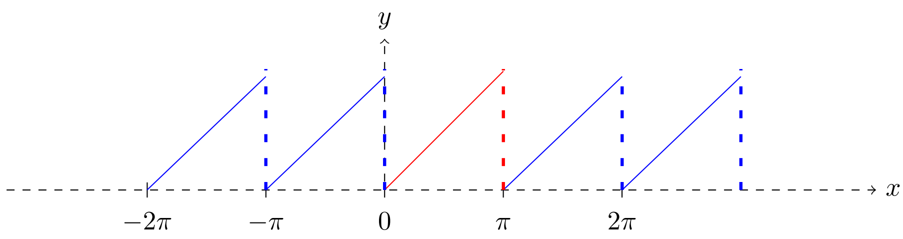
$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ ,\ x \in\ [0,\ \pi] \\ 0 & si.\ x \in\ ]\pi,\ 2\pi] \end{cases}$$



2. *La fonction dents de scie f définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π, définie sur $[0,\ \pi]$ par $f(x) = \pi - x$.*



3. *Il y a d'autres dents de scie possibles, par exemple la fonction discontinue, de période π, définie par $f(x) = x$ sur $[0,\ \pi[$*



3.2 Série trigonométrique

Définition 12
On appelle série trigonométrique une série de la forme

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x) + (a_2 \cos 2\omega x + b_2 \sin 2\omega x) + \cdots$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} > 0$, a_n, $b_n \in \mathbb{R}$
ou sous une forme beaucoup plus compact

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x\big) \tag{3.1}$$

Les coefficients a_n, $n \geq 0$, b_n, $n \geq 1$, *sont appelés coefficients de la série trigonométrique* (3.1)

Définition 13 *(Représentation complexe d'une série trigonométrique)*
D'après les formules d'Euler:

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} \quad \textit{et} \quad \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

ces expréssions misent dans (6.1) *et en possant,*

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; \; c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2}; \; c_0 = \frac{a_0}{2}$$

la série devient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$$

Cette dernière expression est appelée forme complexe d'une série trigonométrique.

Si la série (3.1) *converge, sa somme* S *est une fonction périodique de période* T *car* $\cos n\omega x$ *et* $\sin n\omega x$ *sont périodiques de période* T. *De sorte que*

$$S(x + T) = S(x)$$

Position du problème:

Étant donnée une fonction f, *périodique de période* T, *quelles conditions imposées à* f *pour qu'il existe une série trigonométrique convergente de somme* S *égale à* f *?*

3.3 Série de Fourier

3.3.1 Détermination des coefficients de la série par des formules de Fourier

Supposons que la fonction f, *périodiques de période fondamentale* $T = 2\pi$, *puisse être décomposable en une série trigonométrique convergente sur l'intervalle*

$]-\pi,\ \pi[$ *càd*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n\cos nx+b_n\sin nx\big) \tag{3.2}$$

Supposons que l'intégale de la fonction du premier membre de cet égalité soit égale à la somme des intégrales des termes de la série (3.2)*. Il suffit pour cela de supposer que* $\sum|a_n|$ *et* $\sum|b_n|$ *convergent*

$$|\frac{a_0}{2}|+\big(|a_1|+|b_1|\big)+\big(|a_2|+|b_2|\big)+\cdots \tag{3.3}$$

La série (3.1) *est alors majorable et peut être intégrée terme à terme de* $-\pi$ *à* π *. On peut alors calculer les coefficients* $a_0,\ a_n,\ n\geq 1$ *et* $b_n,\ n\geq 1$ *en intégrant.*

Propriété 8 *(Convergence)*
Si $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *convergent absolument, alors la série trigonométrique* (3.1) *converge normalement sur* $\mathbb{R}$*.*

Preuve

$$\sup_{x\,\in\,\mathbb{R}}\big|a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\leq|a_n|+|b_n|\big|$$

or si $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *convergent absolument, alors* $\sum(|a_n|+|b_n|)$ *converge.*

1. **Calcul de a_0**
   Intégrons les deux membre de (6.2) *de* $-\pi$ *à* π*:*

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nxdx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nxdx$$

Calculons chaque intégrale du second membre:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx=\pi a_0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nxdx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=\frac{a_n\sin n\pi}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nxdx=b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=-b_n\frac{\cos n\pi}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

Par conséquent,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \tag{3.4}$$

Afin de calculer a_n *et* b_n*, nous devons remarquer que si* $n\neq k$*, (à montrer en exercice)*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos nx\times\cos kx\right)dx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx \times \sin kx)\; dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx \times \sin kx)\; dx = 0$$

Et si $n = k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx \times \cos nx)\; dx = \pi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx \times \sin nx)\; dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx \times \sin nx)\; dx = \pi$$

En effet,

$$\cos nx \times \cos kx = \frac{1}{2}\Big[\cos(n+k)x + \cos(n-k)x\Big]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx \times \cos kx) dx = \frac{1}{2}\Big[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x dx\Big] = 0$$

On obtient de manière analogue les autres formules.

2. **Calcul de $a_n,\ n \geq 1$**
   Multiplions les deux membres de

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big)$$

   par $\cos kx$ *puis intégrons les deux membre de* $-\pi$ *à* π*:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\; dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\; dx\big)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\; dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\; dx = a_n \pi \iff a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\; dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\; dx \qquad (3.5)$$

3. **Calcul de $b_n,\ n \geq 1$**
   Multiplions les deux membres par $\sin kx$ *et en procédent de la même manière on obtient*

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\; dx \qquad (3.6)$$

(3.4), (3.5) *et* (3.6) *sont appelés coefficients de Fourier de la fonction* f*. la série de trigonométrique formée avec ces coefficients est appelée série de Fourier de la fonction* f*.*

Définition 14 *On appelle série de Fourier associée à f, la série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

avec

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \; dx$$

Deux questions se posent :

1. *La série de Fourier associée à f est-elle convergente ?*
2. *En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f i.e a-t-on $S(x) = f(x)$?*

3.4 Les théorèmes de convergence

Une réponse est donnée par Dirichlet:

Théorème 13 *(Dirichlet)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes (appelées conditions de Dirichlet):

1. *Les discontinuités de f (si elles existent) sont de première espèce et sont en nombre fini dans tout intervalle fini.*
2. *f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.*

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \begin{cases} f(x) & \text{si , } f \text{ est continue en } x \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Une réponse est donnée par Jordan:

Théorème 14 *(Jordan)*

Soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T=2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes (appelées conditions de Jordan):

1. *Il existe $M>0$ tel que $|f(x)|\ \leq\ M$ (i.e f est bornée)*
2. *Il existe une subdivision de l'intervalle $[a,\ a+2\pi]$:*

$$x_0=a\ <x_1\ <\ldots\ <x_n=a+2\pi$$

telle que laréstriction $f_{|]x_i,\ x_{i+1}[}$ soit continue.

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n\cos nx+b_n\sin nx\big)=\begin{cases} f(x) & si\ ,\ f\ est\ continue\ en\ x\\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & sinon.\end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Remarque 8 *Nous allons étudier quelques cas particuliers. Rappelons d'abord quelques propriétés.*

Soit $f:\ [-k,\ k]\to\mathbb{R}$ est intégrable sur $[-k,\ k]$.

- *Si f est paire alors $\int_{-k}^{k}f(x)dx=2\int_0^k f(x)dx$.*
- *Si f est impaire alors $\int_{-k}^{k}f(x)dx=0$.*

Si f est développable en série de Fourier:

a) Si f est paire

. $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$
car la fonction $x\to f(x)\cos(nx)$ est paire.

. $b_n=0$ *car la fonction $x\to f(x)\sin(nx)$ est impaire.*

b) Si f est impaire

. $a_n=0$ *car la fonction $x\to f(x)\sin(nx)$ est paire.*

. $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$
car la fonction $x\to f(x)\sin(nx)$ est paire.

Résumé:

Si f est paire:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)$$
$$b_n=0,\quad\forall\ n\in\ \mathbb{N}$$

Si f est impaire:

$$a_n=0,\quad\forall\ n\in\ \mathbb{N}$$
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)$$

Exemple 14

Soit $f :]-\pi,\ \pi] \to \mathbb{R}$ *une fonction périodique,* $T = 2\pi$ *définie par* $f(x) = x$

1. *Les discontinuités de* f *sont les points de la forme*

$$x_k = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

et sont de première espèce car $f(x^+) = \pi$ *et* $f(x^-) = -\pi$

2. f *est partout dérivable sauf aux points* x_k*. En ces points nous avons:*

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = 1 \quad et \quad \lim_{x\to\pi^+} \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = 1$$

f *vérifie les conditions de Dirichlet, donc développable en série de Fourier.*

$a_n = 0$ *car la fonction* f *est impaire et*

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

et par suite

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

Exemple 15

Soit $f :]-\pi,\ \pi] \to \mathbb{R}$ *une fonction périodique,* $T = 2\pi$ *définie par* $f(x) = |x|$

1. *On a* $|f(x)| \le \pi$

2. $f_{|_{[-\pi,\ 0]}}$ *est décroissante, continue et* $f_{|_{[0,\ \pi]}}$ *est croissante, continue.*

f *satisfait les conditions du théorème de Jordan donc développable en série de Fourier. De plus* f *est paire, ce qui nous donne* $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi},\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & si\ ,\ n\ paire \\ -\frac{4}{\pi\, n^2} & sinon. \end{cases}$$

La série de Fourier converge vers f *et on a*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

Puisque f *est continue, la convergence est uniforme.*
Remarquons que l'égalité

$$f(0) = 0 \iff \frac{1}{\pi} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \iff \frac{1}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Une des particularités des séries de Fourier est le calcul des sommes de certaines séries numériques.

3.5 Développement en série de Fourier de fonctions non périodiques

Il est clair que le développement en série de Fourier se pratique sur les fonctions périodiques. Cependant, il est possible, dans certains cas, de faire de tels développements pour des fonctions quelconques.

Soit f une fonction non périodique définie sur l'intervalle $[a,\ b]$.
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T \geq b-a$, telle que la réstriction $g|_{[a,\ b]} = f$. Si g satisfait les conditions de Dirichlet, on aura :

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right]$$

avec a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à g. La somme de cette série coincide partout avec f dans l'intervalle $[a,\ b]$ sauf peut-être aux points de discontinuités de f.

Remarque 9
Soit f :$]0,\ l] \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque, et $l > 0$. On suppose que f peut-être prolongée sur $]-l,\ 0[$ et que les conditions de Dirichlet ou de Jordan soient satisfaites. Dans ce cas, on a le choix sur ce prolongement. On peut choisir soit un prolongement pair soit un prolongement impair pour éviter les longs calculs des coefficients.

Exemple 16 *Donner une série de Fourier de période 2π qui coincide sur $]0, \pi[$ avec la fonction $f(x) = e^x$.*

Réponse
Ici on ne précise que l'intervalle où la série de Fourier coincide avec f, c'est à dire$]0, \pi[$. Comme la période de la série de Fourier est 2π, il y'a alors une infinité de répontes; examinons trois cas différents.

Notons $\widetilde{f}_i$, $i = 1, 2, 3,$ le prolongement de f à $\mathbb{R}$ tout entier. $\widetilde{f}_i$, sera une fonction de période 2π qui vaut exactement e^x pour tout x dans $]0, \pi[$.

a) *Choisissons un prolongement pair et posons:*

$$\widetilde{f}_1 = \begin{cases} e^x & si,\ x\ \in]0,\ \pi[\\ e^{-x} & si\, x\ \in [-\pi,\ 0[\end{cases}$$

On vérifie aisément que $\widetilde{f}_1$ est une fonction paire. Posons

$$\widetilde{f}_1(0) = 1, \quad et \quad \widetilde{f}_1(\pi) = e^{\pi},$$

on a alors un prolongement continue sur $\mathbb{R}$. Le graphe de $\widetilde{f}_1$ et celui de la série de Fourier seront identiques.

Le calcul des coefficients donne:

$$a_0 = 2\frac{e^{\pi}-1}{\pi},\ a_n = 2\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2}, \quad et \quad b_n = 0$$

On a alors

$$S_1(x) = \frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2}\cos(nx) = \begin{cases} e^x & si,\ x\ \in [0,\ \pi] \\ e^{-x} & si\ x\ \in [-\pi,\ 0] \end{cases}$$

b) *Choisissons un prolongement impair et posons:*

$$\widetilde{f_2} = \begin{cases} e^x & si,\ x\ \in]0,\ \pi[\\ -e^{-x} & si\ x\ \in]-\pi,\ 0[\end{cases}$$

On remarque que $f_2(x)$ est une fonction impaire mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Elle est discontinue en tout point de la forme $k\pi,\ k\ \in\ \mathbb{Z}$ Le calcul des coefficients donne:

$$a_n = 0\ \forall\ n\ \in\ \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{2n\big[1-(-1)^n e^{\pi}\big]}{n(1+n^2)}$$

On a alors

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n\big[1-(-1)^n e^{\pi}\big]}{n(1+n^2)}\sin(nx) = \begin{cases} e^x & si,\ x\ \in [0,\ \pi] \\ e^{-x} & si\ x\ \in [-\pi,\ 0] \\ 0 & si\ x = 0\ ou\ x = \pm\pi \end{cases}$$

c) *Choisissons un prolongement ni pair ni impair et posons : $f_3(x) = e^x$ si $x\ \in\ ]-\pi,\ \pi[$. On remarque que f_3 est une fonction discontinue en tout point de la forme $\pi + 2k\pi,\ k \in\ \mathbb{Z}$. On a le résultat final*

$$S_3(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\Big[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\big(\cos nx - n\sin nx\big)\Big] = \begin{cases} e^x, & x\ \in]-\pi,\ \pi[\\ \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}, & si\ x = \pm\pi \end{cases}$$

3.5.1 Égalité de Parseval

Théorème 15 *(Parseval)*

Soit f une fonction développable en série de Fourier et de période $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$, alors on a pour $\alpha\ \in\ \mathbb{R}$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n^2 + b_n^2\big) = \frac{\omega}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f^2(x)dx$$

ou bien pour $\alpha = 0$, on a:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n^2 + b_n^2\big) = \frac{1}{T/2}\int_0^T f^2(x)dx$$

Remarque 10

Si dans le théorème si dessus f est de pţriode $T = 2\pi$, $\omega = 1$ et on a:

1. *Égalité de Parseval:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

2. *f paire $\Rightarrow f^2$ paire $\Rightarrow$*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)dx$$

3. *f impaire $\Rightarrow f^2$ paire $\Rightarrow$*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)dx$$

Applications

Exemple 17

f étant une fonction 2π périodique telle que:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in]0,\ \pi[\\ -1 & si\ x \in]-\pi,\ 0[\end{cases}$$

f étant une fonction impaire alors $a_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. On a

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\big(1 - (-1)^n\big) = \begin{cases} 0 & si\ n\ est\ pair \\ \frac{4}{n\pi} & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

La série de Fourier associée est

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} 1 & si\ x \in]0,\ \pi[\\ 0 & si\ x = 0\ ou\ x = \pi \end{cases}$$

Remarquons que pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a

$$S_f\big(\frac{\pi}{2}\big) = 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

D'où l'on tire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Appliquons l'égalité de Parseval:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2}.\frac{1}{(2n+1)^2}$$

soit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{16}. \tag{3.7}$$

Autre remarque:
Posons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge comme une série de Riemann. En séparant les termes pairs et impairs, on a*

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Alors d'aprés (6.7) *et* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *on a:*

$$S = \frac{1}{4}S + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \iff \frac{3S}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \iff S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercices sur les séries de Fourier

Exercice 1
Soient

$$f(t) = t \quad si\ t \in [-\pi; \pi[$$

une fonction impaire sur $\mathbb{R}$, a_n *et* b_n *les coefficients de Fourier de cette fonction.*

1. *Tracer le graphe de* f *sur* $\mathbb{R}$
2. *Indiquer les points de discontinuités de* f *sur* $\mathbb{R}$
3. *Justifier que, pour tout* n, $a_n = 0$.
4. *Prouver que pour tout entier* $n > 0$, $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$.

Exercice 2

Soit f *une fonction* 2π *périodique telle que:*

$$f(x) = (x - \pi)^2, \quad si\ x \in\ [0,\ 2\pi[$$

1. *Tracer le graphe de* f *sur* $\mathbb{R}$
2. *Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de* f.
3. *Étudier la convergence de la série de Fourier de* f.
4. *En déduire les sommes des séries suivantes:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* 2π *périodique telle que:*

$$f(x) = x, si\ x \in\ ]-\pi,\ \pi[$$

1. *Tracer son graphe sur* $\mathbb{R}$
2. *Montrer qu'on peut décomposer* f *en série de Fourier convergente.*
3. *Donner sa série de Fourier* $S_f(x)$ *associée*
4. *En appliquand l'égalite de Parseval Montrer que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 4

Soit f une fonction 2π périodique telle que:

$$f(x) = x^2, \quad si\, x \in]-\pi,\ \pi[$$

1. *Tracer son graphe sur $\mathbb{R}$*

2. *Montrer qu'on peut décomposer f en série de Fourier convergente.*

3. *Donner sa série de Fourier $S_f(x)$ associée*

4. *Montrer que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

5. *En appliquant l'égalité de Parséval, Montrer que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Exercice 5

Soit la fonction périodique $f(x)$ définie sur l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ -\pi \leq x < 0 \\ -\pi & si\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier a_0, a_n, et b_n de la série de Fourier de $f(x)$.
2. Exprimer la série de Fourier de $f(x)$.
3. Déduire la forme de la fonction $f(x)$ à partir de sa série de Fourier.